

Les nombres complexes

Prof. Smail BOUGUERCH

Définition:

L'ensemble des nombres complexes s'écrit : $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } i^2 = -1\}$

L'écriture algébrique d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z
- Le nombre a est la partie réelle de z , notée : $\text{Re}(z)$
- Le nombre b est la partie imaginaire de z , notée : $\text{Im}(z)$

Cas particulier:

- Si $\text{Im}(z) = 0$, alors z est un nombre réel
- Si $\text{Re}(z) = 0$, alors z est un nombre imaginaire pur

Egalité de deux nombres complexes:

Soit z et z' deux nombres complexes

$$z = z' \Leftrightarrow \text{Re}(z) = \text{Re}(z') \text{ et } \text{Im}(z) = \text{Im}(z')$$

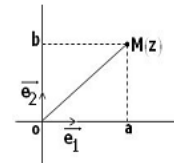
Représentation graphique d'un nombre complexe:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

On relie le nombre complexe z avec le point $M(a; b)$

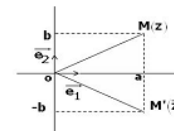
Le nombre z s'appelle l'affixe du point M et le point M s'appelle l'image du nombre z et on écrit : $M(z)$



Conjugué d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Le conjugué du nombre complexe z est le complexe noté \bar{z} avec $\bar{z} = a - ib$



$M(\bar{z})$ و $M(z)$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$
- $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$
- $z^n = \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\bar{z}'}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$

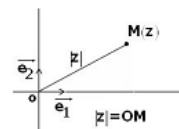
- $\bar{\bar{z}} = z \Leftrightarrow$
- $\bar{-z} = -z \Leftrightarrow$
- $z + \bar{z} = 2\text{Re}(z)$
- $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$
- $z \times \bar{z} = [\text{Re}(z)]^2 + [\text{Im}(z)]^2$

Module d'un nombre complexe:

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe avec : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

Le module du nombre complexe z est le nombre réel positif

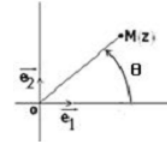
$$|z| \text{ avec } : |z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$



$ z^n = z ^n ; n \in \mathbb{N}^*$	$ -z = z $	$ z \times z' = z \times z' $
$ \bar{z} = z $	$\left \frac{1}{z'}\right = \frac{1}{ z' } \quad (z' \neq 0)$	$\left \frac{z}{z'}\right = \frac{ z }{ z' } \quad (z' \neq 0)$

L'argument d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul et M son image
L'argument du nombre complexe z est θ l'un des
mesures de l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM})$



On le note: $\arg(z)$ et on écrit: $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

La forme trigonométrique et la notation exponentielle d'un nombre complexe non nul:

Soit z un nombre complexe non nul

On pose : $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

- La forme trigonométrique du complexe z est : $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = [r, \theta]$
- La notation exponentielle du complexe z est : $z = re^{i\theta}$

Cas particulier:

L'écriture trigonométrique (réduite) d'un nombre réel a non nul

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\frac{\pi}{2} \right]$	$ai = \left[-a, -\frac{\pi}{2} \right]$

$\arg(zz') = (\arg(z) + \arg(z'))[2\pi]$	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$	$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (r \times r')e^{i(\theta+\theta')}$
$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)[2\pi]$	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$	$\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
$-\arg(z) = (\pi + \arg(z))[2\pi]$	$-[r, \theta] = [r, \pi + \theta]$	$-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
$\arg(z^n) = n \arg(z)[2\pi]$	$[r, \theta]^n = [r^n, n \times \theta]$	$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$
$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)[2\pi]$	$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$	$\frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = (\arg(z) - \arg(z'))[2\pi]$	$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta'\right]$	$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \frac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

- $\forall k \in \mathbb{Z} ; [r, \theta + 2k\pi] = [r, \theta]$
- $\arg(z) = k\pi \Leftrightarrow z$ est un réel ($k \in \mathbb{Z}$)
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow z$ est un imaginaire pur ($k \in \mathbb{Z}$)

Formule de MOIVRE:

$\forall n \in \mathbb{N}$
 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

Formules d'EULER:

$\forall \theta \in \mathbb{R}$
 $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Résolution de l'équation $z^2 = a$ ($z \in \mathbb{C}$) avec ($a \in \mathbb{R}$):

L'équation	Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C} ; z^2 = a$	$a > 0$ $S = \{-i\sqrt{a}; i\sqrt{a}\}$
	$a = 0$ $S = \{0\}$
	$a < 0$ $S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

Résolution de l'équation $z \in \mathbb{C} ; az^2 + bz + c = 0$ avec a et b et c des réels et $a \neq 0$:

L'équation		Ensembles de solutions
$z \in \mathbb{C} ; az^2 + bz + c = 0$ ($\Delta = b^2 - 4ac$)	$\Delta > 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$
	$\Delta = 0$	$S = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$
	$\Delta < 0$	$S = \left\{ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} ; \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}$

Notions géométriques:

La notion géométrique	La relation complexe
La distance AB	$AB = z_B - z_A $
I centre du segment $[AB]$	$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
Mesure de l'angle $(\widehat{AB;AC})$	$(\widehat{AB;AC}) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$
A et B et C des points alignés	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$
A et B et C et D des points cocycliques	$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_D - z_C}{z_B - z_C} \in \mathbb{R}$ ou $\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

La relation complexe	La notion géométrique
$ z - z_A = r ; (r > 0)$	$AM = r$ M appartient au cercle de centre A et de rayon r
$ z - z_A = z - z_B $	$AM = AB$ M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[r ; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle rectangle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1; \theta]$	ABC est un triangle isocèle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm \frac{\pi}{2} \right]$	ABC est un triangle rectangle et isocèle au point A
$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \left[1 ; \pm \frac{\pi}{3} \right]$	ABC est un triangle équilatéral

La représentation complexe de quelques transformations usuelles:

La transformation	La représentation complexe
La translation : $t_{\vec{u}}$	$z' = z + b$, avec b est l'affixe du vecteur \vec{u}
L'homothétie : $h(\Omega; k)$	$z' - \omega = k(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point Ω
La rotation : $R(\Omega; \theta)$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, avec ω l'affixe du point Ω